Zadania na XVIII Podkarpacki Konkurs Matematyczny im. Franciszka Leji

Poziom I

(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i klasy trzecie gimnazjów)

Finał

12 maja 2018 r. godzina 10.00

(150 minut)

1. Dany jest trójkąt ABC o bokach: $|AB| = 1$, $|AC| = 2$, $|BC| = \sqrt{3}$. Wykaż, że odległość środka okręgu wpisanego w ten trójkąt od jednego z wierzchołków trójkąta jest równa połowie iloczynu odległości tego środka od pozostałych wierzchołków.

2. Rozwiąż równanie: $\frac{1}{2x(2x+1)} + \frac{1}{(2x+1)(2x+2)} + \frac{1}{(2x+2)(2x+3)} + \frac{1}{(2x+3)(2x+4)} = \frac{1}{x^2+x+1}$.

3. Dane są ułamki: $\frac{2}{x}$ oraz $\frac{5}{y}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, takie że kwadrat ich sumy wynosi 900. Jeśli licznik pierwszego ułamka zwiększymy o 1, a licznik drugiego ułamka zmniejszymy o 1, to suma nowych ułamków zwiększy się o 1, w stosunku do sumy poprzedniej. Znajdź liczby x i y, dla których ułamki $\frac{2}{x}$ oraz $\frac{5}{y}$ są liczbami całkowitymi.

4. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, taki że $\angle ACB = 90°$, $|BC| = 3$, $|AC| = 4$. Przedłużono boki BC i AC, poza punkty B i A, i narysowano koło styczne do tych przedłużeń i do przeciwprostokątnej trójkąta ABC. Wyznacz stosunek pola tego koła do pola koła opisanego na trójkącie ABC.

5. Sprawdź czy prawdziwa jest równość: $W(x,y) = P(x,y)$, jeśli:
   $W(x,y) = \left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{2xy} + 1\right)\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$ oraz $P(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$, gdzie $x, y > 0$ i $x \neq y$.
   Oblicz wartość wyrażenia $W(x,y)$ dla $x = \sqrt{1,(7)} + \sqrt[3]{0,(037)}$ i $y = (0,(296))^{0,(3)}$.
   Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego.

Powodzenia!